

Über die charakteristischen Wurzeln einer linearen Substitution mit einer Anwendung auf die Theorie der Integralgleichungen.

Von

I. SCHUR in Berlin.

Ist eine algebraische Gleichung in der Form

$$\begin{vmatrix} a_{11} - x & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - x & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - x \end{vmatrix} = 0$$

gegeben und sind $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ ihre Wurzeln, so läßt sich, wie Herr A. Hirsch*) gezeigt hat, in sehr einfacher Weise eine obere Grenze für die absoluten Beträge der ω_v angeben; bedeutet nämlich α die größte unter den n^2 Zahlen $|a_{\kappa\lambda}|$, so ist

$$|\omega_v| \leq n\alpha.$$

In der vorliegenden Arbeit möchte ich auf einige andere, wesentlich schärfere Ungleichungen aufmerksam machen, die für die absoluten Beträge der ω_v bestehen. Die einfachste und zugleich wichtigste unter ihnen ist die Ungleichung

$$\sum_{v=1}^n |\omega_v|^2 \leq \sum_{\kappa, \lambda} |a_{\kappa\lambda}|^2.$$

Indem ich noch angebe, welche Bedeutung hier das Auftreten des Gleichheitszeichens besitzt, erhalte ich einen Satz (Satz II), der eine Reihe von bekannten Resultaten über Hermitesche Formen und orthogonalen Substitutionen als spezielle Fälle umschließt.

*) „Sur les racines d'une équation fondamentale“, Acta Mathematica, Bd. 25, S. 367.

Der zweite Abschnitt enthält eine Anwendung meiner algebraischen Resultate auf die Theorie der linearen homogenen Integralgleichung

$$\lambda \int_a^b K(s, t) \varphi(t) dt = \varphi(s).$$

Einem von Herrn E. Schmidt für reelle symmetrische Kerne $K(s, t)$ angegebenen Verfahren folgend, zeige ich, wie man auch für einen allgemeinen Kern den Begriff der Ordnung eines Eigenwerts λ auf elementarem Wege ohne Benutzung der Fredholmschen ganzen transzendenten Funktion begründen kann. Zugleich ergibt sich unter allgemeinen Voraussetzungen über den Kern $K(s, t)$ ein Beweis für die absolute Konvergenz der Reihe $\sum \frac{1}{\lambda^2}$, in der jeder Eigenwert λ so oft zu schreiben ist, wie seine Ordnung angibt.

Abschnitt I.

Über die charakteristischen Wurzeln einer linearen Substitution.

§ 1.

Im folgenden soll stets die zu einer Größe a konjugiert komplexe Zahl mit $\bar{a}$ bezeichnet werden. Ebenso soll, wenn $P = (p_{x\lambda})$ eine Matrix (lineare homogene Substitution) ist, unter $\bar{P}$ die mit Hilfe der Größen $\bar{p}_{x\lambda}$ gebildete Matrix verstanden werden. Mit P' bezeichne ich, wie üblich, die zu P konjugierte (transponierte) Matrix. Genügt P der Gleichung

$$(1) \quad \bar{P}' P = E,$$

wo $E = (e_{x\lambda})$ die Einheitsmatrix ist, d. h. wird

$$\sum_v \bar{p}_{vx} p_{v\lambda} = e_{x\lambda}, \quad (e_{xx} = 1, e_{12} = e_{13} = \dots = 0)$$

so nenne ich nach dem Vorgange von Herrn L. Autonne*) P eine *unitäre* oder auch eine *unitär orthogonale* Matrix. Die Bedeutung der Gleichung (1) ist bekanntlich die, daß die Hermitesche Einheitsform

$$x_1 \bar{x}_1 + x_2 \bar{x}_2 + \dots$$

ungeändert bleibt, wenn x_x durch $\sum_{\lambda} p_{x\lambda} x_{\lambda}$ (und also $\bar{x}_x$ durch $\sum_{\lambda} \bar{p}_{x\lambda} \bar{x}_{\lambda}$)

*) „Sur l'Hermitien“, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, T. 16 (1902), S. 104.

ersetzt wird. Sind die Koeffizienten von P reell, so wird P eine gewöhnliche (reelle) orthogonale Matrix.

Es sei nun

$$A = (a_{\kappa\lambda}) \quad (\kappa, \lambda = 1, 2, \dots, n)$$

eine Matrix mit beliebigen reellen oder komplexen Koeffizienten. Die charakteristischen Wurzeln von A , d. h. die Wurzeln der Gleichung

$$(2) \quad |A - xE| = \begin{vmatrix} a_{11} - x & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - x & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - x \end{vmatrix} = 0,$$

seien $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$. Dann gilt folgender Satz:

I. *Es läßt sich stets eine unitär orthogonale Matrix P bestimmen, so daß die Matrix*

$$\bar{P}' A P = P^{-1} A P = A$$

die Form

$$A = \begin{pmatrix} \omega_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_{21} & \omega_2 & 0 & \dots & 0 \\ c_{31} & c_{32} & \omega_3 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & \dots & \omega_n \end{pmatrix}$$

erhält.

Der Beweis ist leicht zu erbringen.*) Da nämlich ω_1 eine Wurzel der Gleichung (2) ist, so können wir n Zahlen $q_1, q_2, \dots, q_n$ bestimmen, die den n Gleichungen

$$\sum_{\lambda=1}^n a_{\lambda\kappa} q_\lambda = \omega_\kappa q_\kappa \quad (\kappa = 1, 2, \dots, n)$$

genügen und nicht sämtlich Null sind. Die Summe $\sum_{\kappa=1}^n \bar{q}_\kappa q_\kappa = q$ ist dann eine positive Zahl. Setzt man

$$q_{\kappa 1} = \frac{q_\kappa}{\sqrt{q}},$$

so wird auch

$$\sum_{\lambda=1}^n a_{\lambda\kappa} q_{\lambda 1} = \omega_\kappa q_{\kappa 1}$$

und

$$\sum_{\lambda=1}^n \bar{q}_{\lambda 1} q_{\lambda 1} = 1.$$

*) Vergl. L. Stickelberger, „Über reelle orthogonale Substitutionen“, Programm der polyt. Schule, Zürich, 1877, und L. Autonne, a. a. O., S. 119.

Man bestimme nun in bekannter Weise $n(n-1)$ Zahlen

$$\begin{array}{cccc} q_{12}, & q_{13}, & \dots, & q_{1n} \\ q_{22}, & q_{23}, & \dots, & q_{2n} \\ . & . & . & . \\ q_{n2}, & q_{n3}, & \dots, & q_{nn} \end{array}$$

so, daß

$$\sum_{\nu=1}^n \bar{q}_{\nu\kappa} q_{\nu\lambda} = e_{\kappa\lambda} \quad (\kappa, \lambda = 1, 2, \dots, n)$$

wird. Dann ist die Matrix

$$Q = (q_{\kappa\lambda})$$

eine unitäre Matrix, außerdem wird

$$Q' A Q'^{-1} = \bar{Q}^{-1} A \bar{Q} = \begin{pmatrix} \omega_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \dots & b_{3n} \\ . & . & . & . & . \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix},$$

wo die $b_{\kappa\lambda}$ gewisse Zahlen bedeuten. Die charakteristischen Wurzeln der Matrix

$$B = \begin{pmatrix} b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ b_{32} & b_{33} & \dots & b_{3n} \\ . & . & . & . \\ b_{n2} & b_{n3} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

sind dann die Größen $\omega_2, \omega_3, \dots, \omega_n$. Nimmt man nun den zu beweisenden Satz, der für $n=1$ evident ist, für Matrizen mit $n-1$ Zeilen und Spalten als richtig an, so läßt sich eine unitäre Matrix

$$R = \begin{pmatrix} r_{22} & r_{23} & \dots & r_{2n} \\ r_{32} & r_{33} & \dots & r_{3n} \\ . & . & . & . \\ r_{n2} & r_{n3} & \dots & r_{nn} \end{pmatrix}$$

bestimmen, sodaß

$$R^{-1} B R = \begin{pmatrix} \omega_2 & 0 & \dots & 0 \\ c_{32} & \omega_3 & \dots & 0 \\ . & . & . & . \\ c_{n2} & c_{n3} & \dots & \omega_n \end{pmatrix}$$

wird. Setzt man dann

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ . & . & . & . \\ 0 & r_{n2} & \dots & r_{nn} \end{pmatrix}$$

so wird $P = \bar{Q}S$ eine unitär orthogonale Matrix, die den Bedingungen unseres Satzes genügt.*)

Der Satz I läßt sich auch folgendermaßen aussprechen:

I*. Für jede lineare homogene Substitution A in n Variablen $x_1, x_2, \dots, x_n$ lassen sich n Linearformen $y_1, y_2, \dots, y_n$ angeben, die folgenden Bedingungen genügen:

1. es ist

$$y_1 \bar{y}_1 + y_2 \bar{y}_2 + \dots + y_n \bar{y}_n = x_1 \bar{x}_1 + x_2 \bar{x}_2 + \dots + x_n \bar{x}_n;$$

2. die Linearform y_x geht durch Anwendung der Substitution A in eine Form über, die sich linear und homogen durch $y_1, y_2, \dots, y_x$ ausdrücken läßt.

§ 2.

Aus

$$(3) \quad \bar{P}' A P = A$$

folgt

$$(3') \quad \bar{P}' \bar{A}' P = \bar{A}'.$$

Daher ist wegen $\bar{P}' P = E$

$$\bar{P}' A \bar{A}' P = A \bar{A}'.$$

Es ist aber $\bar{P}' = P^{-1}$, folglich besitzen die Matrizen $A \bar{A}'$ und $A \bar{A}'$ als ähnliche Matrizen dieselbe Spur, und da die Spur einer Matrix der Form $P \bar{P}'$, wie man leicht sieht, nichts anderes ist als die Summe der Quadrate der absoluten Beträge aller Koeffizienten von P , so erhalten wir

$$\sum_{x, \lambda} |a_{x\lambda}|^2 = \sum_v |\omega_v|^2 + \sum_{x > \lambda} |c_{x\lambda}|^2.$$

Insbesondere ergibt sich

$$\sum_v |\omega_v|^2 \leq \sum_{x, \lambda} |a_{x\lambda}|^2.$$

Das Gleichheitszeichen steht hier stets und nur dann, wenn die Zahlen $c_{x\lambda}$ sämtlich gleich Null sind. Dies gibt uns den Satz:

II. Ist $A = (a_{x\lambda})$ eine beliebige lineare homogene Substitution in n Variablen mit den charakteristischen Wurzeln $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$, so ist

$$(4) \quad \sum_v |\omega_v|^2 \leq \sum_{x, \lambda} |a_{x\lambda}|^2.$$

Das Gleichheitszeichen gilt hier stets und nur dann, wenn sich A durch eine unitär orthogonale Transformation der Variablen auf die Diagonalform

*) Sind die $a_{x\lambda}$ und die ω_v reell, so kann P auch als reelle (orthogonale) Matrix gewählt werden.

$$\Delta = \begin{pmatrix} \omega_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \omega_n \end{pmatrix}$$

bringen läßt.

Es ergibt sich zugleich das merkwürdige Resultat, daß, sobald

$$\sum_v |\omega_v|^2 = \sum_{x,\lambda} |a_{x\lambda}|^2$$

ist, die Determinante $|A - xE|$ lauter lineare Elementarteiler besitzen muß.

Dieses Resultat läßt sich noch etwas verallgemeinern.

Sind nämlich die Elementarteiler von $|A - xE|$ sämtlich linear, so läßt sich eine Matrix Q von nicht verschwindender Determinante bestimmen, sodaß

$$Q^{-1} A Q = \Delta$$

wird. Dann wird

$$\bar{Q}' \bar{A}' \bar{Q}'^{-1} = \bar{\Delta}',$$

also

$$\Delta \bar{\Delta}' = Q^{-1} A Q \bar{Q}' \bar{A}' \bar{Q}'^{-1}.$$

Die Spur $\sum_v |\omega_v|^2$ von $\Delta \bar{\Delta}'$ ist daher gleich der Spur der rechts stehenden Matrix oder, was dasselbe ist, gleich der Spur der Matrix

$$A Q \bar{Q}' \bar{A}' \bar{Q}'^{-1} Q^{-1} = A H \bar{A}' H^{-1},$$

wobei $H = Q \bar{Q}'$ zu setzen ist. Hierbei ist H die Matrix einer positiv definiten Hermiteschen Form von nicht verschwindender Determinante oder, wie man auch kurz sagt, eine positive Hermitesche Matrix.

Läßt sich umgekehrt eine derartige Matrix H so bestimmen, daß die Spur von $A H \bar{A}' H^{-1}$ gleich $\sum_v |\omega_v|^2$ wird, so wähle man, was stets möglich ist, eine Matrix Q , für die $H = Q \bar{Q}'$ wird. Dann ist $\sum_v |\omega_v|^2$ zugleich auch die Spur von

$$Q^{-1} A Q \cdot \bar{Q}' \bar{A}' \bar{Q}'^{-1} = B \bar{B}',$$

wo $B = Q^{-1} A Q$ zu setzen ist. Die charakteristischen Wurzeln der zu A ähnlichen Matrix $B = (b_{x\lambda})$ sind aber wieder die Größen $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ und, da für B

$$\sum_v |\omega_v|^2 = \sum_{x,\lambda} |b_{x\lambda}|^2$$

wird, so ist B und folglich auch A der Diagonalmatrix Δ ähnlich.

Es ergibt sich auf diese Weise der Satz:

III. Die Elementarteiler der charakteristischen Determinante einer Matrix $A = (a_{x\lambda})$ mit den charakteristischen Wurzeln $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ sind dann

und nur dann sämtlich linear, wenn sich eine positive Hermitesche Matrix $H = (h_{\kappa\lambda})$ so bestimmen läßt, daß

$$\sum_{\nu} |\omega_{\nu}|^2 = \sum_{\kappa, \lambda, \mu, \nu} h_{\lambda\nu} h'_{\mu\kappa} a_{\kappa\lambda} \bar{a}_{\mu\nu}$$

wird; hierbei sollen die Zahlen $h'_{\mu\kappa}$ die Koeffizienten von H^{-1} bedeuten. Allgemein ist bei einer beliebigen Matrix A für jede positive Hermitesche Matrix $H = (h_{\kappa\lambda})$

$$\sum_{\nu} |\omega_{\nu}|^2 \leq \sum_{\kappa, \lambda, \mu, \nu} h_{\lambda\nu} h'_{\mu\kappa} a_{\kappa\lambda} \bar{a}_{\mu\nu}.$$

§ 3.

Setzt man

$$a_{\kappa\lambda} = r_{\kappa\lambda} + i s_{\kappa\lambda}, \quad \omega_{\nu} = \varrho_{\nu} + i \sigma_{\nu},$$

so geht die Ungleichung (4) über in

$$(5) \quad \sum_{\nu} (\varrho_{\nu}^2 + \sigma_{\nu}^2) \leq \sum_{\kappa, \lambda} (r_{\kappa\lambda}^2 + s_{\kappa\lambda}^2).$$

Andererseits ist aber, da $\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_n^2$ die charakteristischen Wurzeln von A^2 sind, $\sum_{\nu} \omega_{\nu}^2$ die Spur von A^2 , also wird

$$\sum_{\nu} \omega_{\nu}^2 = \sum_{\kappa, \lambda} a_{\kappa\lambda} a_{\lambda\kappa},$$

oder

$$\sum_{\nu} (\varrho_{\nu}^2 - \sigma_{\nu}^2 + 2i \varrho_{\nu} \sigma_{\nu}) = \sum_{\kappa, \lambda} (r_{\kappa\lambda} r_{\lambda\kappa} - s_{\kappa\lambda} s_{\lambda\kappa} + 2i r_{\kappa\lambda} s_{\lambda\kappa}).$$

Daher ist

$$(6) \quad \sum_{\nu} (\varrho_{\nu}^2 - \sigma_{\nu}^2) = \sum_{\kappa, \lambda} (r_{\kappa\lambda} r_{\lambda\kappa} - s_{\kappa\lambda} s_{\lambda\kappa}).$$

Aus (5) und (6) ergibt sich

$$\begin{aligned} 2 \sum_{\nu} \varrho_{\nu}^2 &\leq \sum_{\kappa, \lambda} (r_{\kappa\lambda}^2 + r_{\lambda\kappa}^2) + \sum_{\kappa, \lambda} (s_{\kappa\lambda}^2 - s_{\lambda\kappa}^2), \\ 2 \sum_{\nu} \sigma_{\nu}^2 &\leq \sum_{\kappa, \lambda} (r_{\kappa\lambda}^2 - r_{\lambda\kappa}^2) + \sum_{\kappa, \lambda} (s_{\kappa\lambda}^2 + s_{\lambda\kappa}^2). \end{aligned}$$

Diese Ungleichungen lassen sich auch, wie eine einfache Betrachtung lehrt, auf folgende Form bringen:

$$\begin{aligned} \sum_{\nu} \varrho_{\nu}^2 &\leq \sum_{\kappa, \lambda} \left(\frac{r_{\kappa\lambda} + r_{\lambda\kappa}}{2} \right)^2 + \sum_{\kappa, \lambda} \left(\frac{s_{\kappa\lambda} - s_{\lambda\kappa}}{2} \right)^2, \\ \sum_{\nu} \sigma_{\nu}^2 &\leq \sum_{\kappa, \lambda} \left(\frac{r_{\kappa\lambda} - r_{\lambda\kappa}}{2} \right)^2 + \sum_{\kappa, \lambda} \left(\frac{s_{\kappa\lambda} + s_{\lambda\kappa}}{2} \right)^2. \end{aligned}$$

oder, was dasselbe ist,

$$(7) \quad \sum_{\nu} \varrho_{\nu}^2 \leq \sum_{x, \lambda} \left| \frac{a_{x\lambda} + \bar{a}_{\lambda x}}{2} \right|^2,$$

$$(8) \quad \sum_{\nu} \sigma_{\nu}^2 \leq \sum_{x, \lambda} \left| \frac{a_{x\lambda} - \bar{a}_{\lambda x}}{2} \right|^2.$$

Man kann diese Formeln auch anders beweisen. Aus (3) und (3') folgt

$$\frac{1}{2} \bar{P}'(A \pm \bar{A}')P = \frac{1}{2} (A \pm \bar{A}').$$

Hieraus schließt man wie früher, daß die Summe der Quadrate der absoluten Beträge aller Koeffizienten der Matrix $\frac{1}{2}(A \pm \bar{A}')$ gleich sein muß der analog gebildeten Summe für die Matrix $\frac{1}{2}(A \pm \bar{A}')$. Dies gibt uns aber

$$\sum_{x, \lambda} \left| \frac{a_{x\lambda} \pm \bar{a}_{\lambda x}}{2} \right|^2 = \sum_{\nu} \left| \frac{\omega_{\nu} \pm \bar{\omega}_{\nu}}{2} \right|^2 + \frac{1}{2} \sum_{x > \lambda} |c_{x\lambda}|^2,$$

woraus dann wieder die Ungleichungen (7) und (8) folgen.

Es sei noch hervorgehoben, daß, wenn in einer der Ungleichungen (4), (7) und (8) das Gleichheitszeichen steht, dies auch in den beiden anderen der Fall sein muß.

§ 4.

Bezeichnet man mit a die größte der Zahlen $|a_{x\lambda}|$, mit b die größte der Zahlen $\left| \frac{a_{x\lambda} + \bar{a}_{\lambda x}}{2} \right|$ und mit c die größte der Zahlen $\left| \frac{a_{x\lambda} - \bar{a}_{\lambda x}}{2} \right|$, so folgt aus den Ungleichungen (4), (7) und (8)

$$\sum_{\nu} |\omega_{\nu}|^2 \leq n^2 a^2, \quad \sum_{\nu} \varrho_{\nu}^2 \leq n^2 b^2, \quad \sum_{\nu} \sigma_{\nu}^2 \leq n^2 c^2.$$

Speziell wird also

$$|\omega_{\nu}| \leq na, \quad |\varrho_{\nu}| \leq nb, \quad |\sigma_{\nu}| \leq nc.$$

Diese Ungleichungen sind bereits von Herrn A. Hirsch a. a. O. abgeleitet worden. Sind ferner die Zahlen a_{xx} sämtlich reell, so wird $a_{xx} - \bar{a}_{xx} = 0$; daher ergibt sich insbesondere aus (8)

$$\sum_{\nu} \sigma_{\nu}^2 \leq n(n-1)c^2.$$

Da außerdem jedes von Null verschiedene σ_{ν}^2 mindestens zweimal vorkommen muß, so wird

$$\sigma_v^2 \leq \frac{n(n-1)}{2} c^2,$$

also

$$|\sigma_v| \leq c \sqrt{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

Diese Ungleichung hat zuerst Herr I. Bendixson*) auf einem anderen Wege erhalten.

Ich möchte noch eine Bemerkung an die Hirschsche Ungleichung

$$|\omega_v| \leq na$$

anknüpfen. Soll hier für eine Wurzel $\omega_v = \omega$ das Gleichheitszeichen gelten, so ergibt sich aus dem hier Bewiesenen, daß folgende Bedingungen erfüllt sein müssen:

1. Unter den n Wurzeln $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ sind $n-1$ gleich 0.

2. Die Koeffizienten $a_{x\lambda}$ sind alle von gleichem absoluten Betrage a und der absolute Betrag der Summe $\sum_x a_{xx}$ ist gleich na .

3. Die Elementarteiler von $|A - xE|$ sind sämtlich linear, woraus in Verbindung mit 1. folgt, daß A vom Range 1 sein muß.

Hieraus schließt man ohne Mühe, daß die Zahlen $a_{x\lambda}$ von der Form

$$a_{x\lambda} = a e^{i(\varphi + \varphi_x - \varphi_\lambda)}$$

sein müssen, wo $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ reelle Größen bedeuten.

§ 5.

Ehe ich weiter gehe, möchte ich noch darauf aufmerksam machen, daß in dem Satz II der bekannte Hadamardsche Satz über den Maximalwert einer Determinante**) enthalten ist.

Die Determinante D der Matrix $A = (a_{x\lambda})$ ist nämlich nichts anderes als das Produkt $\omega_1 \omega_2 \dots \omega_n$. Nach dem Satz über das arithmetische und das geometrische Mittel wird daher

$$(9) \quad |D|^2 = |\omega_1|^2 |\omega_2|^2 \dots |\omega_n|^2 \leq \left(\frac{|\omega_1|^2 + |\omega_2|^2 + \dots + |\omega_n|^2}{n} \right)^n \\ \leq \left(\frac{n^2 a^2}{n} \right)^n = n^n a^{2n}.$$

Folglich ist

$$(10) \quad |D| \leq n^{\frac{n}{2}} a^n.$$

*) „Sur les racines d'une équation fondamentale“, Acta Mathematica Bd. 25, S. 359. — Herr A. Hirsch hat noch gezeigt, daß die Bendixsonsche Ungleichung auch dann gilt, wenn nur vorausgesetzt wird, daß die $a_{x\lambda} + a_{\lambda x}$ reell sind.

**) „Résolution d'une question relative aux déterminants“. Bulletin des sciences mathématiques, 1893, S. 240.

Dies ist die Hadamardsche Ungleichung. Soll $|D| = n^{\frac{n}{2}} a^n$ sein, so muß nach Hadamard weiter

$$|a_{x\lambda}| = a,$$

$$p_{x\lambda} = \sum_v a_{xv} \bar{a}_{\lambda v} = na e_{x\lambda}$$

sein. Dies ergibt sich hier folgendermaßen. Gilt in (10) das Gleichheitszeichen, so müssen auch die Ungleichungen (9) und (4) in Gleichungen übergehen. Daher muß

$$(11) \quad |\omega_1| = |\omega_2| = \dots = |\omega_n| = a\sqrt{n}, \quad |a_{x\lambda}| = a$$

werden. Außerdem muß, da

$$\sum_v |\omega_v|^2 = \sum_{x,\lambda} |a_{x\lambda}|^2$$

wird, die Matrix A der Diagonalmatrix Δ , und zugleich $A\bar{A}'$ der Matrix $\Delta\bar{\Delta}'$ ähnlich sein. Es wird aber wegen (11)

$$\Delta\bar{\Delta}' = naE.$$

Folglich ist auch, da diese Matrix nur sich selbst ähnlich ist,

$$A\bar{A}' = (p_{x\lambda}) = naE$$

d. h. $p_{x\lambda} = na e_{x\lambda}$.

§ 6.

Bezeichnet man die mit Hilfe der $\binom{n}{v}^2$ Unterdeterminanten v^{ten} Grades von A gebildete Matrix mit $C_v A$, so werden bekanntlich*) die charakteristischen Wurzeln von $C_v A$ die $\binom{n}{v}$ Größen

$$\omega_{\alpha_1} \omega_{\alpha_2} \dots \omega_{\alpha_v} \quad (\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_v).$$

Daher ist wegen (4)

$$(12) \quad \sum |\omega_{\alpha_1} \omega_{\alpha_2} \dots \omega_{\alpha_v}|^2 \leq \sum |D_{\alpha\beta}^{(v)}|^2,$$

wo $D_{\alpha\beta}^{(v)}$ alle Unterdeterminanten v^{ten} Grades von A durchläuft. Die rechts stehende Zahl ist nichts anderes als die Spur von $(C_v A)(C_v \bar{A})'$. Es ist aber allgemein

$$(C_v P)' = C_v P', \quad (C_v P)(C_v Q) = C_v(PQ).$$

Daher ist $\sum |D_{\alpha\beta}^{(v)}|^2$ die Spur von $C_v(A\bar{A}')$. Bezeichnet man wie früher das allgemeine Element $\sum_{\mu} a_{x\mu} \bar{a}_{\lambda\mu}$ von $A\bar{A}'$ mit $p_{x\lambda}$, so wird also

*) G. Rados, „Zur Theorie der adjungirten Substitutionen“, Math. Annalen, Bd. 48, S. 417.

$$(13) \quad \sum |\omega_{\alpha_1} \omega_{\alpha_2} \cdots \omega_{\alpha_\nu}|^2 \leq \sum \begin{vmatrix} p_{\alpha_1 \alpha_1} & p_{\alpha_1 \alpha_2} & \cdots & p_{\alpha_1 \alpha_\nu} \\ p_{\alpha_2 \alpha_1} & p_{\alpha_2 \alpha_2} & \cdots & p_{\alpha_2 \alpha_\nu} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{\alpha_\nu \alpha_1} & p_{\alpha_\nu \alpha_2} & \cdots & p_{\alpha_\nu \alpha_\nu} \end{vmatrix} \quad (\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_\nu).$$

Nun ist aber $A\bar{A}'$ die Matrix der positiven Hermiteschen Form

$$\sum_x (a_{1x}x_1 + a_{2x}x_2 + \cdots + a_{nx}x_n) (\bar{a}_{1x}\bar{x}_1 + \bar{a}_{2x}\bar{x}_2 + \cdots + \bar{a}_{nx}\bar{x}_n),$$

folglich erscheint auch jede Hauptunterdeterminante von $A\bar{A}'$ als die Determinante einer positiven Hermiteschen Form. Nach einem von Hadamard a. a. O. bewiesenen Satze ist aber eine solche Determinante höchstens gleich dem Produkt der Koeffizienten ihrer Hauptdiagonale.*) Aus (13) ergibt sich daher

$$(13') \quad \sum |\omega_{\alpha_1} \omega_{\alpha_2} \cdots \omega_{\alpha_\nu}|^2 \leq \sum p_{\alpha_1 \alpha_1} p_{\alpha_2 \alpha_2} \cdots p_{\alpha_\nu \alpha_\nu} \quad (\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_\nu).$$

Diese Formeln lassen sich als eine Verallgemeinerung des eben erwähnten Hadamardschen Determinantensatzes auffassen.

§ 7.

Aus der Formel (4) lassen sich noch andere interessante Ungleichungen ableiten.

Zunächst kann man, indem man beachtet, daß $\omega_1^r, \omega_2^r, \dots, \omega_n^r$ die charakteristischen Wurzeln von A^r sind, eine obere Grenze für $\sum_\nu |\omega_\nu|^{2r}$ ableiten.

Von größerem Interesse scheint mir folgende Bemerkung zu sein.

Man habe neben der Matrix noch eine andere Matrix $B = (b_{\mu\nu})$ mit m Zeilen und Spalten. Die charakteristischen Wurzeln von B seien $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m$. Dann ist

$$\sum_{x=1}^n a_{xx} = \sum_{x=1}^n \omega_x, \quad \sum_{\mu=1}^m b_{\mu\mu} = \sum_{\mu=1}^m \eta_\mu.$$

Ferner ist:

$$\begin{aligned} \sum_{x,\mu} |\omega_x + \eta_\mu|^2 &= \sum_{x,\mu} (\omega_x \bar{\omega}_x + \eta_\mu \bar{\eta}_\mu + \omega_x \bar{\eta}_\mu + \bar{\omega}_x \eta_\mu) \\ &= m \sum_x |\omega_x|^2 + n \sum_\mu |\eta_\mu|^2 + \sum_{x,\mu} (a_{xx} \bar{b}_{\mu\mu} + \bar{a}_{xx} b_{\mu\mu}). \end{aligned}$$

*) Vergl. auch E. Fischer, „Über den Hadamardschen Determinantensatz“, Archiv der Mathematik und Physik, dritte Reihe, Bd. 13, S. 32.

Andererseits ist

$$\sum_{\kappa, \mu} |a_{\kappa\kappa} + b_{\mu\mu}|^2 + m \sum_{\kappa \neq \lambda} |a_{\kappa\lambda}|^2 + n \sum_{\mu \neq \nu} |b_{\mu\nu}|^2 \quad \left(\begin{matrix} \kappa, \lambda = 1, 2, \dots, n \\ \mu, \nu = 1, 2, \dots, m \end{matrix} \right)$$

gleich

$$m \sum_{\kappa, \lambda} |a_{\kappa\lambda}|^2 + n \sum_{\mu, \nu} |b_{\mu\nu}|^2 + \sum_{\kappa, \mu} (a_{\kappa\kappa} \bar{b}_{\mu\mu} + \bar{a}_{\kappa\kappa} b_{\mu\mu}).$$

Daher gilt stets die Ungleichung

$$\sum_{\kappa, \mu} |\omega_{\kappa} + \eta_{\mu}|^2 \leq \sum_{\kappa, \mu} |a_{\kappa\kappa} + b_{\mu\mu}|^2 + m \sum_{\kappa \neq \lambda} |a_{\kappa\lambda}|^2 + n \sum_{\mu \neq \nu} |b_{\mu\nu}|^2.$$

Setzt man insbesondere $B = -A$, so kann $\eta_{\mu} = -\omega_{\mu}$ angenommen werden, und man erhält

$$\sum_{\kappa < \mu} |\omega_{\kappa} - \omega_{\mu}|^2 \leq \sum_{\kappa < \mu} |a_{\kappa\kappa} - a_{\mu\mu}|^2 + n \sum_{\kappa \neq \lambda} |a_{\kappa\lambda}|^2.$$

Hieraus läßt sich sofort eine obere Grenze für den absoluten Betrag der Diskriminante d der Gleichung $|A - xE| = 0$ ableiten. Aus

$$d = \prod_{\kappa < \mu} (\omega_{\kappa} - \omega_{\mu})^2$$

folgt nämlich

$$|d|^{\frac{2}{n(n-1)}} \leq \frac{2}{n(n-1)} \sum_{\kappa < \mu} |\omega_{\kappa} - \omega_{\mu}|^2,$$

daher ist

$$|d|^{\frac{2}{n(n-1)}} \leq \frac{2}{n(n-1)} \sum_{\kappa < \mu} |a_{\kappa\kappa} - a_{\mu\mu}|^2 + \frac{2}{n-1} \sum_{\kappa \neq \lambda} |a_{\kappa\lambda}|^2.$$

§ 8.

Setzt man speziell

$$A = \begin{pmatrix} -a_1, & -a_2 x_2, & \dots, & -a_{n-1} x_{n-1}, & -a_n x_n \\ x_2^{-1}, & 0, & \dots, & 0, & 0 \\ 0, & x_3^{-1} x_2, & \dots, & 0, & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & 0, & \dots, & x_n^{-1} x_{n-1}, & 0 \end{pmatrix},$$

wo die a_v beliebige, die x_v von Null verschiedene Zahlen bedeuten, so wird

$$(14) \quad x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n = 0$$

die charakteristische Gleichung von A . Ist daher

$$b_v = |a_v|^2, \quad p_v = |x_v|^2,$$

so genügen die Wurzeln $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ der Gleichung (14) der Ungleichung

$$\sum_v |\omega_v|^2 \leq b_1 + b_2 p_2 + \dots + b_n p_n + \frac{1}{p_2} + \frac{p_2}{p_3} + \dots + \frac{p_{n-1}}{p_n} \cdot *)$$

Diese Formel gilt für alle positiven Zahlen $p_2, p_3, \dots, p_n$. Für

$$p_2 = p, \quad p_3 = p^2, \quad \dots, \quad p_n = p^{n-1}$$

erhält man die einfachere Formel

$$\sum_v |\omega_v|^2 \leq b_1 + b_2 p + \dots + b_n p^{n-1} + \frac{n-1}{p}.$$

Allgemeiner folgt aus (12) die Ungleichung

$$\sum_{\alpha_1 < \alpha_2 < \dots} |\omega_{\alpha_1} \omega_{\alpha_2} \dots \omega_{\alpha_v}|^2 \leq \binom{n-2}{v-1} \sum_{\mu=1}^{n-1} b_\mu p^{\mu-v} + \binom{n-1}{v-1} b_n p^{n-v} + \binom{n-1}{v} p^{-v},$$

die wieder für jedes positive p richtig ist. Nimmt man insbesondere α_n als von Null verschieden an, so wird für $p = b_n^{-\frac{1}{n}}$

$$\sum_{\alpha_1 < \alpha_2 < \dots} |\omega_{\alpha_1} \omega_{\alpha_2} \dots \omega_{\alpha_v}|^2 \leq \binom{n-2}{v-1} \sum_{\mu=1}^{n-1} b_\mu b_n^{\frac{v-\mu}{n}} + \binom{n}{v} b_n^{\frac{v}{n}}.$$

Der direkte Beweis dieser für jede algebraische Gleichung geltenden Formeln scheint schwierig zu sein.

§ 9.

Aus dem Satz II lassen sich einige bekannte Sätze über lineare Substitutionen als spezielle Folgerungen ableiten.

Es sei zunächst $A = (a_{x\lambda})$ eine Hermitesche Matrix, also $a_{x\lambda} = \bar{a}_{\lambda x}$. Dann wird

$$\sum_v |\omega_v|^2 \leq \sum_{x,\lambda} a_{x\lambda} \bar{a}_{\lambda x} = \sum_{x,\lambda} a_{x\lambda} a_{\lambda x} = \sum_v \omega_v^2.$$

Da aber andererseits $\sum_v \omega_v^2 \leq \sum_v |\omega_v|^2$ ist, so muß $\sum_v \omega_v^2 = \sum_v |\omega_v|^2$ sein,

folglich müssen die ω_v reell sein. Zugleich ergibt sich $\sum_v |\omega_v|^2 = \sum_{x,\lambda} |a_{x\lambda}|^2$,

und dies liefert uns die bekannte Tatsache, daß jede Hermitesche Form

*) Es läßt sich zeigen, daß hier für $n > 2$ das Gleichheitszeichen nur dann stehen kann, wenn $a_1 = a_2 = \dots = a_{n-1} = 0$ ist

durch eine unitär orthogonale Transformation der Variabeln auf die Gestalt $\omega_1 y_1 \bar{y}_1 + \omega_2 y_2 \bar{y}_2 + \dots + \omega_n y_n \bar{y}_n$ gebracht werden kann.*)

Ist ferner A eine unitär orthogonale Matrix, so wird $A \bar{A}' = E$. Die Spur $\sum_{\kappa, \lambda} |a_{\kappa \lambda}|^2$ von $A \bar{A}'$ wird dann gleich der Spur von E , also gleich n .

Außerdem ist der absolute Betrag der Determinante D von A (wegen $A \bar{A}' = E$) gleich 1. Da aber $D = \omega_1 \omega_2 \dots \omega_n$ ist, so ergibt sich

$$1 = (|\omega_1|^2 |\omega_2|^2 \dots |\omega_n|^2)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{|\omega_1|^2 + |\omega_2|^2 + \dots + |\omega_n|^2}{n} \leq \frac{\sum_{\kappa, \lambda} |a_{\kappa \lambda}|^2}{n} = 1.$$

Daher muß

$$1 = (|\omega_1|^2 |\omega_2|^2 \dots |\omega_n|^2)^{\frac{1}{n}} = \frac{|\omega_1|^2 + |\omega_2|^2 + \dots + |\omega_n|^2}{n}$$

werden; dies erfordert, daß

$$|\omega_1|^2 = |\omega_2|^2 = \dots = |\omega_n|^2 = 1$$

wird. Daher liegen die charakteristischen Wurzeln einer unitär orthogonalen Substitution A auf dem Einheitskreis. Zugleich ergibt sich aus

$$\sum_{\nu} |\omega_{\nu}|^2 = \sum_{\kappa, \lambda} |a_{\kappa \lambda}|^2, \text{ daß } A \text{ durch eine unitär orthogonale Transformation}$$

der Variabeln auf die Diagonalform gebracht werden kann. — Diese beiden Sätze sind zuerst von Herrn Frobenius**) aufgestellt worden.

Abschnitt II.

Eine Anwendung auf die Theorie der Integralgleichungen.

§ 10.

Es sei $K(s, t)$ eine für $a \leq s \leq b$, $a \leq t \leq b$ definierte, reelle oder komplexe Funktion der reellen Variablen s und t , die im ganzen Defi-

*) Diese Ableitung der Grundeigenschaften der Hermiteschen Formen ist gewiß weniger einfach als der sonst übliche Beweis, der sich gewissermaßen direkt auf den hier mit I bezeichneten Satz stützt. Aber es schien mir von Interesse, darauf hinzuweisen, daß sich diese Eigenschaften unmittelbar aus der die Hermiteschen Formen eindeutig kennzeichnenden Gleichung

$$\sum_{\kappa, \lambda} a_{\kappa \lambda} \bar{a}_{\kappa \lambda} = \sum_{\kappa, \lambda} a_{\kappa \lambda} a_{\lambda \kappa}$$

ablesen lassen.

**) „Über die principale Transformation der Thetafunktionen mehrerer Variabeln“, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 95, S. 264. — Vergl. auch A. Loewy, „Über bilineare Formen mit konjugiert imaginären Variablen“, Nova Acta Acad. Leop.-Carol., Bd. 71, S. 379.

nitionsbereich stetig sein soll. *) Eine für $a \leq s \leq b$ stetige Funktion $\varphi(s)$ heißt dann nach Herrn Hilbert eine *zum Eigenwert λ gehörende Eigenfunktion des Kerns $K(s, t)$* , wenn

$$(15) \quad \varphi(s) = \lambda \int_a^b K(s, t) \varphi(t) dt$$

ist. Herr Fredholm **) hat eine gewisse, durch $K(s, t)$ eindeutig definierte ganze transzendente Funktion

$$D(x) = 1 + d_1 x + d_2 x^2 + \dots$$

angegeben, die nur für die Eigenwerte λ des Kerns $K(s, t)$ verschwindet. Ist λ eine n -fache Nullstelle von $D(x)$, so heißt n die *Ordnung* des Eigenwerts λ . Diese Zahl n hat noch folgende Bedeutung: *es lassen sich n , aber nicht mehr als n , linear unabhängige (stetige) Funktionen $\varphi_1(s), \varphi_2(s), \dots, \varphi_n(s)$ bestimmen, für die*

$$\int_a^b K(s, t) \varphi_\alpha(t) dt = c_{\alpha 1} \varphi_1(s) + c_{\alpha 2} \varphi_2(s) + \dots + c_{\alpha, \alpha-1} \varphi_{\alpha-1}(s) + \frac{1}{\lambda} \varphi_\alpha(s),$$

wird, wo die $c_{\alpha\beta}$ Konstanten sind. ***)

Es ist nun von Interesse, auf elementarem Wege ohne Einführung der Fredholmschen Funktion $D(x)$ nachzuweisen, daß sich zu jedem Eigenwert λ eine ganze Zahl n angeben läßt, die durch die zuletzt erwähnte Eigenschaft charakterisiert ist. Man erhält auf diese Weise eine neue einfache Definition des Begriffs „Ordnung eines Eigenwerts“. Für reelle symmetrische Kerne hat diese Aufgabe bereits Herr E. Schmidt †) gelöst. Die folgende Betrachtung schließt sich auch aufs engste dem Schmidtschen Gedankengang an.

*) Um einen einfachen Fall vor Augen zu haben, beschränke ich mich im folgenden auf die Betrachtung stetiger Funktionen. Es würde aber genügen anzunehmen, daß die hier vorkommenden Funktionen gewissen leicht zu formulierenden Bedingungen der Integrabilität genügen.

**) „Sur une classe d'équations fonctionnelles“, Acta Mathematica, Bd. 27, S. 365.

***) J. Plemelj, „Zur Theorie der Fredholmschen Funktionalgleichung“, Monatshefte für Math. und Phys., Jahrgang XV (1904), S. 93. Vergl. auch E. Goursat, „Recherches sur les équations intégrales linéaires“, Annales de la faculté des sciences de l'université de Toulouse, 1908, S. 6. — Daß die Ordnung n von λ die *größte* Zahl ist, welche die im Text genannte Eigenschaft besitzt, wird erst in der Goursatschen Arbeit (§ 44) ausdrücklich hervorgehoben und bewiesen. Es läßt sich dies aber auch ohne Mühe aus den Ausführungen auf S. 119 der Plemeljschen Arbeit folgern.

†) „Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen“, I. Teil, Math. Annalen, Bd. 63, S. 443.

§ 11.

Wir bezeichnen im folgenden überall, wenn $\varphi(s)$ eine beliebige Funktion der reellen Variablen s ist, die konjugiert komplexe Funktion mit $\bar{\varphi}(s)$. Sind $\varphi_1(s), \varphi_2(s), \dots, \varphi_n(s)$ im Intervall $a \leq s \leq b$ stetige Funktionen und ist

$$(16) \quad \int_a^b \varphi_\alpha(s) \bar{\varphi}_\beta(s) ds = e_{\alpha\beta}, \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \dots, n)$$

wo die $e_{\alpha\beta}$ in derselben Weise wie in § 1 zu erklären sind, so sage ich, die Funktionen $\varphi_1(s), \varphi_2(s), \dots, \varphi_n(s)$ bilden ein unitär orthogonales System.

Es gilt dann folgende Regel: Sind n linear unabhängige, für $a \leq s \leq b$ stetige Funktionen $\psi_1(s), \psi_2(s), \dots, \psi_n(s)$ gegeben, so lassen sich stets n Funktionen

$$\varphi_\alpha(s) = \sum_{\beta=1}^n p_{\alpha\beta} \psi_\beta(s)$$

mit konstanten Koeffizienten $p_{\alpha\beta}$ bestimmen, die ein unitär orthogonales System bilden.

Der Beweis dieses Satzes, der für reelle Funktionen zuerst von Herrn E. Schmidt (a. a. O., § 3) ausgesprochen worden ist, läßt sich prinzipiell am einfachsten folgendermaßen führen. Setzt man

$$\int_a^b \psi_\alpha(s) \bar{\psi}_\beta(s) ds = h_{\alpha\beta},$$

so wird

$$\sum_{\alpha, \beta} h_{\alpha\beta} x_\alpha \bar{x}_\beta = \int_a^b [x_1 \psi_1(s) + \dots + x_n \psi_n(s)] [\bar{x}_1 \bar{\psi}_1(s) + \dots + \bar{x}_n \bar{\psi}_n(s)] ds$$

eine positive Hermitesche Form von nicht verschwindender Determinante.*)

Die Konstanten $p_{\alpha\beta}$ sind nun so zu bestimmen, daß

$$\int_a^b \varphi_\alpha(s) \bar{\varphi}_\beta(s) ds = \sum_{\gamma, \delta} p_{\alpha\gamma} \bar{p}_{\beta\delta} h_{\gamma\delta} = e_{\alpha\beta}$$

wird. Hierzu hat man nur n Linearformen

$$y_\gamma = p_{1\gamma} x_1 + p_{2\gamma} x_2 + \dots + p_{n\gamma} x_n$$

zu berechnen, für die

$$\sum_{\gamma, \delta} h_{\gamma\delta} y_\gamma \bar{y}_\delta = x_1 \bar{x}_1 + x_2 \bar{x}_2 + \dots + x_n \bar{x}_n$$

wird, was bekanntlich stets möglich ist.

*) Vergl. E. Fischer, a. a. O., S. 38.

Bilden ferner $\varphi_1(s), \varphi_2(s), \dots, \varphi_n(s)$ ein unitär orthogonales System, und ist $f(s)$ eine beliebige für $a \leq s \leq b$ stetige Funktion, so setze man

$$\int_a^b f(s) \bar{\varphi}_\alpha(s) ds = A_\alpha,$$

also

$$\int_a^b \bar{f}(s) \varphi_\alpha(s) ds = \bar{A}_\alpha,$$

Dann wird

$$\begin{aligned} & \int_a^b \left[f(t) - \sum_{\alpha=1}^n A_\alpha \varphi_\alpha(t) \right] \left[\bar{f}(t) - \sum_{\alpha=1}^n \bar{A}_\alpha \varphi_\alpha(t) \right] dt \\ &= \int_a^b f(t) \bar{f}(t) dt - 2 \sum_{\alpha=1}^n A_\alpha \bar{A}_\alpha + \sum_{\alpha, \beta} A_\alpha \bar{A}_\beta \int_a^b \varphi_\alpha(t) \bar{\varphi}_\beta(t) dt \\ &= \int_a^b f(t) \bar{f}(t) dt - \sum_{\alpha=1}^n A_\alpha \bar{A}_\alpha. \end{aligned}$$

Daher ist stets

$$\sum_{\alpha=1}^n A_\alpha \bar{A}_\alpha \leq \int_a^b f(t) \bar{f}(t) dt.$$

Diese Ungleichung soll nach dem Vorgange von E. Schmidt (a. a. O., § 1) als die Besselsche Ungleichung bezeichnet werden.

§ 12.

Zur Abkürzung möge für jede Funktion $f(s)$

$$\int_a^b K(s, t) f(t) dt = K(f)$$

gesetzt werden. Wird für n linear unabhängige stetige Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$

$$K(\varphi_\alpha) = \sum_{\beta=1}^n a_{\alpha\beta} \varphi_\beta \quad (\alpha = 1, 2, \dots, n),$$

so sagen wir: $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ erfahren bei Anwendung der Operation K die Substitution $A = (a_{\alpha\beta})$ oder auch die Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ bilden ein invariantes System des Kernels $K(s, t)$, das zur Substitution A gehört. Jede in einem invarianten System vorkommende Funktion nenne ich eine *Hauptfunktion**) des Kernels. Die charakteristische Determinante $|A - xE|$

*) „Fonction principale“ bei E. Goursat, a. a. O.

der Substitution A soll kurz die *charakteristische Funktion des invarianten Systems* $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ heißen. Treten an Stelle von $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ irgend welche n lineare homogene Verbindungen $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ der φ_α (mit konstanten Koeffizienten), die untereinander linear unabhängig sind, so bilden auch die Funktionen $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ ein invariantes System des Kerns und die diesem System entsprechende Substitution B ist eine zu A ähnliche Substitution. Man kann hierbei die ψ_α so wählen, daß B irgend eine vorgeschriebene zu A ähnliche Substitution wird. Hieraus folgt zugleich auf Grund der Lehre von den linearen Substitutionen, daß sich für eine charakteristische Wurzel ω von A , die genau m Elementarteiler der Determinante $|A - xE|$ zum Verschwinden bringt, m und nicht mehr als m linear unabhängige Funktionen ψ_μ der Form

$$\psi_\mu = c_{\mu 1} \varphi_1 + c_{\mu 2} \varphi_2 + \dots + c_{\mu n} \varphi_n \quad (\mu = 1, 2, \dots, m)$$

angeben lassen, sodaß

$$K(\psi_\mu) = \omega \psi_\mu$$

wird.*) Ist ω speziell von Null verschieden, so wird $\lambda = \frac{1}{\omega}$ ein Eigenwert des Kerns $K(s, t)$.

Hat man zwei invariante Systeme $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ und $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_p$ des Kerns $K(s, t)$ und besitzen die zugehörigen charakteristischen Funktionen keinen Teiler gemeinsam, so müssen, wie in bekannter Weise geschlossen wird, die $n + p$ Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n; \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_p$ untereinander linear unabhängig sein.

Von Wichtigkeit ist auch noch folgende Bemerkung. Es seien m Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$ gegeben, unter denen nur r linear unabhängig sind, etwa die Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_r$. Ist dann bekannt, daß für die m Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$ Gleichungen der Form

$$K(\varphi_\mu) = \sum_{\nu=1}^m c_{\mu\nu} \varphi_\nu$$

bestehen, wo die $c_{\mu\nu}$ Konstanten sind, so erfahren offenbar die r linear unabhängigen Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_r$ bei Anwendung der Operation K eine gewisse lineare Substitution A , sie bilden also ein invariantes System des Kerns $K(s, t)$. Es gilt dann die leicht zu beweisende Regel: *Die charakteristische Funktion $|A - xE|$ des Systems $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_r$ ist ein Divisor der charakteristischen Determinante der Substitution $C = (c_{\mu\nu})$.*

*) Vergl. etwa S. Pincherle und U. Amaldi, „Le operazioni distributive“ (Bologna, 1901), Kap. IV.

§ 13.

Ich beweise nun folgenden Satz:

IV. *Bilden die n Funktionen $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ ein invariantes System des Kerns $K(s, t)$ und ist*

$$(17) \quad (\omega_1 - x)(\omega_2 - x) \cdots (\omega_n - x)$$

die charakteristische Funktion dieses invarianten Systems, so ist stets

$$(18) \quad \sum_{\nu=1}^n |\omega_\nu|^2 \leq \int_a^b \int_a^b |K(s, t)|^2 ds dt.$$

Man bestimme nämlich n lineare homogene Verbindungen $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ der ψ_α , sodaß die φ_α ein unitär orthogonales System bilden. Dann sind $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ von selbst linear unabhängige Funktionen, und wir erhalten in diesen Funktionen ein invariantes System des Kerns $K(s, t)$, dessen charakteristische Funktion wieder die Funktion (17) ist. Es sei

$$(19) \quad K(\varphi_\alpha) = \int_a^b K(s, t) \varphi_\alpha(t) dt = \sum_{\beta=1}^n a_{\alpha\beta} \varphi_\beta(s).$$

Setzt man für ein gegebenes s in der Besselschen Ungleichung

$$f(t) = \bar{K}(s, t),$$

wo $\bar{K}(s, t)$ die zu $K(s, t)$ konjugiert komplexe Funktion bedeutet, so wird

$$A_\alpha = \int_a^b \bar{K}(s, t) \bar{\varphi}_\alpha(t) dt = \sum_{\beta=1}^n \bar{a}_{\alpha\beta} \bar{\varphi}_\beta(s).$$

Daher ist

$$\sum_{\alpha, \beta, \gamma} a_{\alpha\beta} \bar{a}_{\alpha\gamma} \varphi_\beta(s) \varphi_\gamma(s) \leq \int_a^b K(s, t) \bar{K}(s, t) dt.$$

Integriert man nun nach s von a bis b , so erhält man wegen (16)

$$(20) \quad \sum_{\alpha, \beta} a_{\alpha\beta} \bar{a}_{\alpha\beta} = \sum_{\alpha, \beta} |a_{\alpha\beta}|^2 \leq \int_a^b \int_a^b K(s, t) \bar{K}(s, t) ds dt. *)$$

Da aber $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ die charakteristischen Wurzeln der Substitution $A = (a_{\alpha\beta})$ sind, so ist

$$(21) \quad \sum_{\nu=1}^n |\omega_\nu|^2 \leq \sum_{\alpha, \beta} |a_{\alpha\beta}|^2.$$

Aus (20) und (21) ergibt sich die zu beweisende Ungleichung (18)

*) Vergl. E. Schmidt, a. a. O., § 5.

Ich füge noch folgendes hinzu. Ist $Q = (q_{\alpha\beta})$ irgend eine unitär orthogonale Substitution, und setzt man

$$\chi_\alpha(s) = \sum_{\beta=1}^n q_{\alpha\beta} \varphi_\beta(s),$$

so bilden auch die Funktionen $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n$ ein unitär orthogonales System und es wird

$$K(\chi_\alpha) = \sum_{\beta=1}^n c_{\alpha\beta} \chi_\beta,$$

wo die Matrix $C = (c_{\alpha\beta})$ aus der Gleichung

$$C = Q A Q^{-1} = Q A \bar{Q}'$$

zu berechnen ist. Aus dem Satz I ergibt sich daher, daß man jedes invariante System mit der charakteristischen Funktion (17) durch ein *unitär orthogonales System* $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n$ ersetzen kann, für das

$$K(\chi_\alpha) = c_{\alpha 1} \chi_1 + c_{\alpha 2} \chi_2 + \dots + c_{\alpha, \alpha-1} \chi_{\alpha-1} + \omega_\alpha \chi_\alpha$$

wird.

Ist speziell

$$(22) \quad \sum_{\nu=1}^n |\omega_\nu|^2 = \sum_{\alpha, \beta} |a_{\alpha\beta}|^2,$$

so werden die Konstanten $c_{\alpha\beta}$ von selbst gleich Null, so daß sich

$$K(\chi_\alpha) = \omega_\alpha \chi_\alpha$$

ergibt. Dies tritt z. B. stets ein, wenn $K(s, t)$ ein reeller, symmetrischer oder allgemeiner ein *Hermitecher Kern* ist, d. h. wenn $K(s, t) = \bar{K}(s, t)$ wird. Denn aus der Gleichung (19) folgt, indem man mit $\bar{\varphi}_\gamma(s)$ multipliziert und nach s zwischen a und b integriert,

$$a_{\alpha\gamma} = \int_a^b \int_a^b K(s, t) \varphi_\alpha(t) \bar{\varphi}_\gamma(s) dt ds:$$

Ist nun $K(s, t) = \bar{K}(t, s)$, so ergibt sich hieraus $a_{\alpha\gamma} = \bar{a}_{\gamma\alpha}$, d. h. $A = (a_{\alpha\beta})$ wird in diesem Fall eine Hermitesche Matrix; für eine solche ist aber die Bedingung (22) gewiß erfüllt. Zugleich ergibt sich, daß die Eigenwerte eines Hermiteschen Kerns sämtlich reell sind.

§ 14.

Es sei nun

$$\lambda = \frac{1}{\omega}$$

ein Eigenwert des Kerns $K(s, t)$. Für jede zu λ gehörende Eigenfunktion φ wird dann

$$K(\varphi) = \omega \varphi.$$

Die Funktion φ erscheint also als eine invariante Funktion des Kerns, und die zugehörige charakteristische Funktion ist $\omega - x$. Ich betrachte nun allgemeiner diejenigen invarianten Systeme $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ des Kerns, deren charakteristische Funktion gleich $(\omega - x)^n$ wird. Dann wird nach Satz IV

$$n|\omega|^2 \leq k,$$

wo k das in (18) auftretende Integral bedeuten soll. Also ist $n \leq k|\lambda|^2$, d. h. n ist unterhalb einer endlichen Grenze gelegen. Die größte Zahl n , für die sich ein invariantes System $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ des Kerns mit der charakteristischen Funktion $\left(\frac{1}{\lambda} - x\right)^n$ angeben läßt, soll nun die Ordnung des Eigenwerts λ heißen. Auf Grund des in § 10 erwähnten Plemelj-Goursatschen Satzes ist diese Zahl n zugleich auch die Ordnung des Eigenwerts im Fredholmschen Sinne.

Es seien ferner

$$\lambda_1 = \frac{1}{\omega_1}, \lambda_2 = \frac{1}{\omega_2}, \dots, \lambda_p = \frac{1}{\omega_p}$$

p verschiedene Eigenwerte des Kerns $K(s, t)$, die Ordnung von λ_α sei n_α . Bilden dann für ein gegebenes ϱ die n_ϱ Funktionen

$$(23) \quad \varphi_{\varrho 1}, \varphi_{\varrho 2}, \dots, \varphi_{\varrho n_\varrho}$$

ein invariantes System des Kerns mit der charakteristischen Funktion $(\omega_\varrho - x)^{n_\varrho}$, so erhalten wir in den

$$n = n_1 + n_2 + \dots + n_p$$

Funktionen (23) n linear unabhängige Funktionen, die als ein invariantes System mit der charakteristischen Funktion

$$(\omega_1 - x)^{n_1} (\omega_2 - x)^{n_2} \dots (\omega_p - x)^{n_p}$$

erscheinen. Folglich ist nach (18)

$$n_1|\omega_1|^2 + n_2|\omega_2|^2 + \dots + n_p|\omega_p|^2 \leq k$$

oder, was dasselbe ist,

$$\frac{n_1}{|\lambda_1|^2} + \frac{n_2}{|\lambda_2|^2} + \dots + \frac{n_p}{|\lambda_p|^2} \leq k.$$

Dies lehrt uns aber (vergl. E. Schmidt, a. a. O., § 5), daß die Eigenwerte des Kerns $K(s, t)$ keine Häufungsstelle im Endlichen besitzen. Zugleich ergibt sich, daß die Reihe

$$\sum \frac{1}{|\lambda|^2},$$

erstreckt über alle Eigenwerte λ des Kerns, wobei jeder Eigenwert so oft zu schreiben ist, wie seine Ordnung angibt, konvergent und zwar kleiner als die Zahl k ist. Hieraus folgt auch, daß die Fredholmsche ganze transzen-

dente Funktion $D(x)$, deren Geschlecht bekanntlich höchstens gleich 2 ist*), eine Produktzerlegung der Form

$$D(x) = e^{ax+bx^2} \prod \left(1 - \frac{x}{\lambda}\right) e^{\frac{x}{\lambda}}$$

aufweist. Dieses Resultat scheint für die hier betrachteten allgemeinen Kerne neu zu sein.

§ 15.

Unsere Betrachtung bedarf noch einer Ergänzung. Ist nämlich n wieder die Ordnung eines Eigenwerts $\lambda = \frac{1}{\omega}$ und bilden $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ ein invariantes System mit der charakteristischen Funktion $(\omega - x)^n$, so fragt es sich: inwiefern sind die Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ und die zugehörige lineare Substitution $A = (a_{\alpha\beta})$, für die

$$K(\varphi_\alpha) = \sum_{\beta=1}^n a_{\alpha\beta} \varphi_\beta$$

wird, durch den Eigenwert λ eindeutig bestimmt?

Diese Frage ist leicht zu entscheiden.

Hat man nämlich neben $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ noch ein zweites invariantes System $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ mit der charakteristischen Funktion $(\omega - x)^n$, so sei

$$K(\psi_\alpha) = \sum_{\beta=1}^n b_{\alpha\beta} \psi_\beta.$$

Die Substitution $(b_{\alpha\beta})$ möge mit B bezeichnet werden. Sind dann unter den $2n$ Funktionen

$$(24) \quad \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n; \quad \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$$

r linear unabhängig, etwa $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_r$, so muß zunächst, weil doch die φ_α (und ebenso die ψ_α) linear unabhängig sein sollen, $r \geq n$ sein. Ferner bilden die Funktionen $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_r$ wieder ein invariantes System des Kerns. Nach der am Schluß des § 12 gemachten Bemerkung muß aber die charakteristische Funktion dieses Systems ein Divisor der charakteristischen Determinante $(\omega - x)^{2n}$ der Substitution

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

sein, und also gleich $(\omega - x)^r$ werden. Hieraus folgt aber, daß $r = n$ sein muß, da sonst n nicht als die Ordnung des Eigenwerts λ zu kenn-

*) Vergl. Plemelj, a. a. O., S. 101 und T. Lalesco, „Sur l'ordre de la fonction entière $D(\lambda)$ de Fredholm“, Comptes Rendus, 25. November 1907, S. 906.

zeichnen wäre. Demnach ist jede der Funktionen $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ eine lineare homogene Verbindung der Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ mit konstanten Koeffizienten. Zugleich ergibt sich, daß die Substitution B der Substitution A ähnlich sein muß. Sieht man ähnliche Substitutionen als nicht voneinander verschieden an, so erscheint A als eine durch λ eindeutig charakterisierte Substitution. Die Anzahl der zu λ gehörenden linear unabhängigen Eigenfunktionen des Kerns $K(s, t)$ ist dann nichts anderes als die Anzahl der Elementarteiler der Determinante $|A - xE|$.

Die Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ kann man passend als ein *vollständiges zum Eigenwert λ gehörendes invariantes System* bezeichnen.

Allgemeiner schließt man in ähnlicher Weise:

Man habe irgend ein invariantes System $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_p$ des Kerns $K(s, t)$, die zugehörige charakteristische Funktion sei

$$(\omega_1 - x)^{p_1} (\omega_2 - x)^{p_2} \dots (\omega_m - x)^{p_m}, \quad (p_1 + p_2 + \dots + p_m = p)$$

wo $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$ voneinander verschieden sein sollen. Jede nicht verschwindende unter den Zahlen ω_μ ist dann der reziproke Wert eines Eigenwerts λ_μ des Kerns, und ist n_μ die Ordnung dieses Eigenwerts, so ist $p_\mu \leq n_\mu$. Sind insbesondere alle m Zahlen $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$ von Null verschieden und bilden die Funktionen

$$(25) \quad \varphi_{\mu 1}, \varphi_{\mu 2}, \dots, \varphi_{\mu n_\mu} \quad (\mu = 1, 2, \dots, m)$$

ein vollständiges zu λ_μ gehörendes invariantes System, so läßt sich jede der p Funktionen $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_p$ durch die $n_1 + n_2 + \dots + n_m$ Funktionen (25), linear und homogen mit konstanten Koeffizienten darstellen.